数理解析研究所講究録
775巻 1992年 11-31

単純楕円型特異点の Symplectic Quatient としての構成

京大数理研　八尋　親雄
(Chikao Yahiro)

Kronheimer は、1986年に、2次元単純特異点(＝有理二重点)と、その semi-universal deformation を微分幾何でいう Hyper-Kähler Quatient の方法を用いて構成した。
2次元単純特異点は、Klein 群 K によって、$\mathbb{C}^2/K$ なる商特異点として実現される。　Kronheimer は、K の群環から出発して、Hyper-Kähler 構造をもつ Affine 空間を定義し、その Hyper-Kähler Quatient として、$\mathbb{C}^2/K$ 及びその semi-universal deformation を得たのである。
一方、単純楕円型特異点と呼ばれる、2次元の孤立特異点が、斎藤恭司氏によって発見されている。
これは、特異点の Hierarchy でいうと、単純特異点の次の族として位置するものであり、離散 Heisenberg 群(但し、この群は無限群)による Quatient としてあらわせる。

この小論では、単純楕円特異点に対して、Kronheimerの構成のanalogyを考える。
すなわち、離散Heisenberg群から出発して、あるSym-plectic空間（幾何的には、接続の空間）と、その上にactする群作用（幾何的には、ゲージ群作用）を定義し、そのSymplectic Quatientとして、単純楕円型特異点が、あらわれることを示す。

目次

§1、Kronheimer理論の概略

Klein群Kをとる。これは$SU(2)$（特殊ユニタリ群）の離散部分群であるので、自然な2次元表現$\rho : K \curvearrowright \mathbb{C}^2$をもつ。この時$\mathbb{C}^2/\rho(K)$が単純特異点である。
群Kの、複素数体$\mathbb{C}$上の群環$\mathbb{C}[K]$を考える。Kは$\mathbb{C}[K]$に正則表現Rで作用する。$R : K \curvearrowright \mathbb{C}[K]$.

表現のtensor積 $\rho\otimes \mathrm{Ad}R : K \curvearrowright \mathbb{C}^2\otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{End}\,\mathbb{C}[K]$ を考え.

$$M := \{\mathbb{C}^2\otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{End}\,\mathbb{C}[K]\}^{(K,\rho\otimes \mathrm{Ad}R)}$$ （不動点集合）

とおく。 $\mathbb{C}^2$と.四元数体の同一視.及び.$\mathbb{C}[K]$上のHermite内積を固定することによって.M上にHyper-Kähler構造を定義できる。

$$G := U(\mathbb{C}[K])^{(K,\mathrm{Ad}R)}$$ （正則表現と可換なユニタリ変換）

とおくと.Gはadjoint作用として.Mに働くが.MのHyper-Kähler構造を保存する。

故に.moment写像 $\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K) : M \longrightarrow \mathbb{R}^3\otimes\mathfrak{g}^*$ が考えられる。 このとき.

$\boxed{\text{定理}}$ （Kronheimer）

（1） $\mu^{-1}(0)/G \cong \mathbb{C}^2/K$

（2） $\mathfrak{g}^*$には.Gがcoadjoint-actionで作用する

$\mathfrak{f} := (\mathfrak{g}^*)^{(G,\mathrm{coad})}$ （不動点集合）とおくと.

$\mu^{-1}(\mathbb{R}^3\otimes\mathfrak{f})/G \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^3\otimes\mathfrak{f}$ なるfibration

が得られるが.これは.単純特異点 $\mathbb{C}^2/K$のsemi-universal deformation.及びそのsimultaneous-resolutionになっている。

§2. 離散Heisenberg群と単純楕円型特異点

$\boxed{2-1}$ 離散Heisenberg群

$p \in \mathbb{Z}$とする。index pの離散Heisenberg群H_pを.
次のような3×3行列のなす群として定義する。

$$H_p := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m_3 & \frac{m_1}{p} \\ & 1 & m_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} : m_j \in \mathbb{Z} \ (j=1,2,3) \right\}$$

簡単のため. 上の行列を. $\bar{m} = [m_1, m_2, m_3]$とかくと.
群の乗法は、$[m_1, m_2, m_3]\cdot[m_1', m_2', m_3']$
$= [m_1 + m_1' + p m_3 m_2', \ m_2 + m_2', \ m_3 + m_3']$
H_pの中心は$\{[m_1, 0, 0] : m_1 \in \mathbb{Z}\}$であり.
$N := \{[m_1, m_2, 0] : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$は$H_p$の.極大な可換部分群である。

$\boxed{2-2}$ 単純楕円型特異点

楕円曲線$E_\tau := \mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}$ （$\tau \in \mathbb{H}$:上半平面） とする。
E_τ上の.正則line bdleでChern数$=p$なるもの:L_pを考える。 pが負整数のとき、零切断をblow downしたL_p/E_τは2次元正規特異点。 特に$p=-1,-2,-3$の時は単純楕円型特異点と呼ばれ. 3変数多項式による曲面の$(0)=(0,0,0)$における特異点として実現できる。

$p=-1$ のとき. $x^2 - 4y^3 + g_2 y z^4 + g_3 z^6$ $\quad \tilde{E}_8$-type

$P=-2$ のとき、$x^2-4y^3Z+g_2\cdot yZ^3+g_3\cdot Z^4$ $\widetilde{E}_7$-type

$P=-3$ のとき、$Zx^2-4y^3+g_2\cdot yZ^2+g_3\cdot Z^3$ $\widetilde{E}_6$-type

但し、$g_2=g_2(\tau)$, $g_3=g_3(\tau)$

$\boxed{2-3}$ 離散 Heisenberg 群 H_p による

単純楕円型特異点の構成

H_p の4次元線型表現 ρ を次で定義する。

$$\mathbb{C}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \xmapsto{\rho_{\overline{m}}} \begin{pmatrix} 1 & m_3 & \frac{-m_3^2}{2} & \frac{-m_1}{p} \\ & 1 & -m_3 & -m_2 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{for} \quad \overline{m}=[m_1,m_2,m_3]\in H_p$$

射影 $\pi : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は、作用 ρ によって

$${}^t(x_1,x_2,x_3,x_4) \longmapsto {}^t(x_3,x_4)$$

不変に保たれる。

$\tau\in\mathbb{H}$（複素上半平面）をとって、Affine 部分空間 $\pi^{-1}(\tau,1)\subset\mathbb{C}^4$ を考えると、H_p は $\pi^{-1}(\tau,1)$ 上に作用する。このとき、

<u>FACT</u>（斎藤恭司）

商空間 $\pi^{-1}(\tau,1)/H_p$ は単純楕円型特異点である。

つまり、次の複素解析空間としての同型が成りたつ。

$$\pi^{-1}(\tau,1)/H_p \cong X_{p,\tau}\setminus(0) \qquad (P=-1,-2,-3)$$

但し、上の $X_{p,\tau}$ は $p=-1,-2,-3$ に応じて、$\widetilde{E}_8$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_6$-type の、modulous τ をもつ、単純楕円型特異点。

§3、接続の空間の構成と主定理

$\boxed{\text{概要}}$ 2次元torus上の無限次元vect. bdleを考える。
そのbdleの切断の空間に、離散Heisenberg群H_pの作用を定義し、bdleの接続で、H_p作用-擬不変なもののなす空間を考える。　H_p-擬不変接続の空間は、Symplectic構造をもち、H_p-不変ゲージ群が、Symplectic構造を保って作用している。　そのSymplectic Quatientは、H_p-擬不変flat接続の、H_p不変ゲージ群による同値類空間である。我々はこの空間に着目する。
ここでは、接続に、更に、正規性の条件をつけ、ゲージ群をユニタリーゲージ群に制限したものを考えた時、得られる同値類の空間は、単純楕円型特異点と同型になることを示す。

$\boxed{3\text{-}1}$ H_p-擬不変接続の空間$M_{\tau,p}$の構成　(p: 負整数)

・2次元torus $\mathbb{T}_p^2 := \mathbb{R}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni [x_1, x_2]$

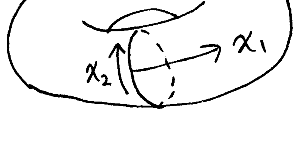
$u_1 = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\frac{x_1}{p}\right)$, $u_2 = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,x_2\right)$ とおく。

(ここで片方の変数x_1について$p\mathbb{Z}$で割るのは
すでに定義したH_pの表現ρとの整合性のため)

・Dehn twist　$T:$ $\mathbb{T}_p^2 \longrightarrow \mathbb{T}_p^2$

$$[x_1, x_2] \longmapsto [x_1, x_1 + x_2]$$

$\mathbb{T}_p^2$



Tはx_2方向のcycleに沿って
角度$2\pi p$のDehn twistである。

・ $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni [x_3]$ $\quad u_3 = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,x_3)$ とおく。

Hilbert 空間 $L^2(S^1) = \{ S^1$上の2乗可積分函数$\}$ を fibre とする。$\mathbb{T}_p^2$上の自明な bdle $\mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \longrightarrow \mathbb{T}_p^2$ を考える

定義 $\quad \Gamma := \left\{ \begin{array}{l} \text{Hilbert bdle } \mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \longrightarrow \mathbb{T}_p^2 \\ \quad \text{の } L^2\text{-切断} \end{array} \right\}$

・ Γは自然に Hilbert 空間になる。

・ $s \in \Gamma$は $\quad s(x_1,x_2) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} s_m(x_1,x_2)\cdot u_3^m$

ここで $s_m \in L^2(\mathbb{T}_p^2)$、と展開でき、

このとき、s の norm $\|s\|$ は

$$\|s\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|s_m\|^2_{L^2(\mathbb{T}_p^2)}$$

・ $C(\mathbb{T}_p^2) = \{ \mathbb{T}_p^2$上の連続($\mathbb{C}$-値)函数$\}$ とすると

$C(\mathbb{T}_p^2)$は函数倍として、Γに作用する。

これによって、Γを左$C(\mathbb{T}_p^2)$-module とみる。

定義 $\quad$ 離散 Heisenberg 群 H_p の、Γへの作用 R.

$$\begin{array}{ccc} H_p & \curvearrowright & \Gamma \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \bar{\ell} = [\ell_1,\ell_2,\ell_3] & & s = \sum_m s_m\cdot u_3^m \quad (s_m \in L^2(\mathbb{T}_p^2)) \end{array}$$

$$R_{\bar{\ell}}(s) := u_1^{\ell_1} u_2^{\ell_2} \cdot \sum_m (T^{*\ell_3} s_m)\cdot u_3^{\ell_3+m}$$

ここで、T^*は Dehn twist Tによる函数のひきもどし、

$$(T^{*\ell_3} s_m)(x_1,x_2) = s_m(x_1,\, x_1\ell_3 + x_2)$$

注意　H_pの極大可換部分群 $N=\{[l_1,l_2,0] \quad l_j\in\mathbb{Z}\}$
は作用Rによって"函数倍"として働く。

次に、Γ上の linear operator で、H_p作用 Rと可換なもののなす集合を決定する。

$$\mathcal{L}(\Gamma):=\{\Gamma\text{上の linear operator}\}$$

$$\mathcal{E}_p:=\ \mathcal{L}(\Gamma)^{(H_p,\mathrm{Ad}R)}$$

：H_p作用Rと可換な lin. op. 全体。とおく。

FACT　$\forall\alpha\in\mathcal{E}_p$に対して、$\mathbb{T}_p^2$上の函数の系列
$\{a_l=a_l(x_1,x_2)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ が一意的に決まり、

$$s=\sum_m s_m\cdot u_3^m\in\Gamma \text{ に対して、}$$

$$\alpha(s)=\sum_{l,m}(T^{*m}a_l)\cdot s_m\cdot u_3^{m+l} \text{ となる。}$$

上の $\alpha\in\mathcal{E}_p$と $\{a_l=a_l(x_1,x_2)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ の対応を、

$$\alpha\equiv\{a_l(x_1,x_2)\}_{l\in\mathbb{Z}} \text{ と書く}$$

定義　"trace map" tr

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}:\ &\mathcal{E}_p\longrightarrow\mathbb{C}\\ &\ \ \alpha\longmapsto\int_0^p dx_1\cdot\int_0^1 dx_2\ a_0(x_1,x_2)\end{aligned}$$

と定義すると、

但し、$\alpha\equiv\{a_l(x_1,x_2)\}_{l\in\mathbb{Z}}$

- $\alpha,\alpha'\in\mathcal{E}_p$で、合成operator $\alpha\circ\alpha'$, $\alpha'\circ\alpha$が考えられるならば、$\mathrm{tr}(\alpha\circ\alpha')=\mathrm{tr}(\alpha'\circ\alpha)$

表現のtensor積 $\rho\otimes AdR : H_p \curvearrowright \mathbb{C}^4\otimes\mathcal{L}(\Gamma)$

$$\begin{array}{ccc} H_p & \curvearrowright & \mathbb{C}^4\otimes\mathcal{L}(\Gamma) \\ \Psi & & \\ \bar{\ell}=[\ell_1,\ell_2,\ell_3] & & \begin{pmatrix} B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \ell_3 & -\frac{\ell_3^2}{2} & -\frac{\ell_1}{p} \\ & 1 & -\ell_3 & -\ell_2 \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_\ell\circ B_1\circ R_\ell^{-1}\\ R_\ell\circ B_2\circ R_\ell^{-1}\\ R_\ell\circ B_3\circ R_\ell^{-1}\\ R_\ell\circ B_4\circ R_\ell^{-1}\end{pmatrix}\end{array}$$

射影 $\pi\otimes I : \mathbb{C}^4\otimes\mathcal{L}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}^2\otimes\mathcal{L}(\Gamma)$

$${}^t(B_1,B_2,B_3,B_4) \longmapsto {}^t(B_3,B_4)$$ を考える

$\tau\in\mathbb{H}$ (複素上半平面) をとって. Affine部分空間

$(\pi\otimes I)^{-1}(-2\pi\sqrt{-1}\tau I, -2\pi\sqrt{-1}I) < \mathbb{C}^4\otimes\mathcal{L}(\Gamma)$ を考えると、

H_pはこのAffine部分空間上に作用している。

<u>定義</u> $M_{\tau,p} := \left\{(\pi\otimes I)^{-1}(-2\pi\sqrt{-1}\tau I, -2\pi\sqrt{-1}I)\right\}^{(H_p,\ \rho\otimes AdR)}$

(不動点集合)

- $M_{\tau,p}$の元は、bdle $\mathbb{T}_p^2\times L^2(S^1)\longrightarrow\mathbb{T}_p^2$ の接続

  つまり、$(B_1,B_2)\in M_{\tau,p}$ならば、

  $s\in\Gamma$, $f=f(x_1,x_2)\in C^1(\mathbb{T}_p^2)$ (C^1級函数)

  に対して. $B_j(f\cdot s) = \frac{\partial}{\partial x_j}f\cdot s + f\cdot B_j(s)$

  $(j=1,2)$ となる。

  よって、$M_{\tau,p}$の元は、bdle $\mathbb{T}_p^2\times L^2(S^1)\longrightarrow\mathbb{T}_p^2$ の接続であって、更に、H_pの作用に関して、ある種の変換性(擬不変性)を持つものである。

<u>FACT</u> $M_{\tau,p}$ は、次のような集合である。

$$M_{\tau,p} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1 ,\ \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma) \\ A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\Gamma)^{(N, AdR)} : C(\mathbb{T}_p^2)\text{-linear な operator} \\ \text{であって、更に、次のような形をしている。} \\ \begin{cases} A_1 = \frac{-\tau}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 + \alpha_2 \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) + 2\pi\sqrt{-1}\, \alpha_1 \\ A_2 = \qquad\qquad\qquad\qquad -\tau \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) + 2\pi\sqrt{-1}\, \alpha_2 \end{cases} \\ \qquad \text{但し、} \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{E}_p \end{array} \right.$$

<u>注意</u>　Γ の元 S を $S = \sum_{m \in \mathbb{Z}} S_m(u_1, u_2) \cdot U_3^m$ と表す。

$\{U_3^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ を基として、$\frac{\partial}{\partial x_3}$, $\alpha_j \equiv \{ a_\ell^{(j)}(x_1, x_2) \}_{\ell \in \mathbb{Z}}$

は次のような "$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-行列" として表示できる。

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \ddots & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 2\pi\sqrt{-1}\, n & & \\ & & & 2\pi\sqrt{-1}(n+1) & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} & < n \\ \qquad\qquad \hat{n} & \end{array}$$

（対角行列）

$$\alpha_j = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & T^* a_{n-1}(x_1,x_2) & & & \\ & T^* a_n(x_1,x_2) & a_{n-1}(x_1,x_2) & & \\ & & a_n(x_1,x_2) & T^{*-1} a_{n-1}(x_1,x_2) & \\ & & & T^{*-1} a_n(x_1,x_2) & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} & < n \\ \qquad\qquad \hat{n} & \end{array}$$

$\boxed{3-2}$ 空間 $M_{\tau,p}$ 上の Symplectic 構造.

Affine 部分空間 $M_{\tau,p} \subset \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma)$ に付随する vector 部分空間を $W_p \subset \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma)$ とすると.

$$W_p = \left\{ \begin{array}{l} (V_1, V_2) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma) \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = \alpha_2 \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + 2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_1 \\ V_2 = \qquad\qquad\quad 2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_2 \end{array} \right. \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{E}_p) \end{array} \right\}$$

$(V_1, V_2), (V_1', V_2') \in W_p$ とすると

$V_1 \circ V_2' - V_2 \circ V_1' \in \mathcal{E}_p$ となる

<u>定義</u> W_p 上の Symplectic form $\omega_{\mathbb{C}}$ を次で定義する。

$$\omega_{\mathbb{C}} : W_p \times W_p \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega_{\mathbb{C}}\big((V_1, V_2), (V_1', V_2')\big) := \mathrm{tr}\left(V_1 \circ V_2' - V_2 \circ V_1'\right)$$

・$\omega_{\mathbb{C}}$ は skew, $\mathbb{C}$-bilinear で非退化。

よって. $\omega_{\mathbb{C}}$ は. Affine space $M_{\tau,p}$ 上の Symplectic 構造を定義する。

$\boxed{3-3}$ Symplectic 作用と主定理

$\mathcal{B}(\Gamma) := \{ \Gamma$ 上の有界 linear operator$\}$

$\mathcal{B}(\Gamma)^{\times} := \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{B}(\Gamma) \text{の元で. 可逆、更に逆作用素} \\ \text{もまた. } \mathcal{B}(\Gamma) \text{の元となるもの} \end{array} \right\}$

$\left\{\mathcal{B}(\Gamma)^{\times}\right\}^{(H_p, \mathrm{Ad}R)}$: H_p-作用 R と可換な. $\mathcal{B}(\Gamma)^{\times}$ の元全体

これは. $M_{\tau,p}$ に adjoint として作用する。

$$M_{\tau,p} \ni (B_1, B_2) \longmapsto (g \circ B_1 \circ g^{-1}, g \circ B_2 \circ g^{-1}) \in M_{\tau,p}$$

但し．$g \in \{\mathcal{A}(\Gamma)^{\times}\}^{(H_p, \mathrm{Ad}R)}$

この作用は．*bdle* $\mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \longrightarrow \mathbb{T}_p^2$ に対する（H_p-作用 Rで不変な）ゲージ変換である。　これは $\boxed{3\text{-}2}$ で定義した$M_{\tau,p}$上のSymplectic構造を保存し、*moment map* は $\mu_{\mathbb{C}}(B_1, B_2) = [B_1, B_2]$　（曲率）

この時の Symplectic Quatient を考えよう。

我々は．$(B_1, B_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right) \in M_{\tau,p}$に対して．

①．linear operator としての正規性

②　$\mathbb{T}_p^2$の函数としての微分可能性．(C^2-級)

を要請し、ゲージ群についても次のことを要請する。

①　unitary operator である

②　$\mathbb{T}_p^2$の函数としての微分可能性（C^3-級）

つまり．$M'_{\tau,p} \subset M_{\tau,p}$(部分集合)

$G_p \subset \{\mathcal{A}(\Gamma)^{\times}\}^{(H_p, \mathrm{Ad}R)}$　を次のように定義

$$M'_{\tau,p} := \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{L}(\Gamma) \\ \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{-\tau}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 + \alpha_2 \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + 2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_1 \\ A_2 = \qquad\qquad\qquad -\tau \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + 2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_2 \end{array} \right. \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{E}_p \text{ に対して．} \alpha_j \equiv \{a_l^{(j)}(x_1, x_2)\}_{l \in \mathbb{Z}} \\ \text{とすると．} a_l^{(j)} \in C^2(\mathbb{T}_p^2) \quad (C^2\text{-級})\text{で} \\ \sum_l \sup_{x \in \mathbb{T}_p^2} |a_l^{(j)}(x)| < \infty \\ \sum_l \sup_{x \in \mathbb{T}_p^2} \left|\frac{\partial}{\partial x_k} a_l^{(j)}(x)\right| < \infty \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2 \\ k = 1, 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$G_p := \left\{ \begin{array}{l} g \in \mathcal{U}(\Gamma)^{(H_p, \mathrm{Ad} R)} \quad : H_p \text{作用} R \text{と可換な} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ユニタリ作用素} \\ g \equiv \{ g_\ell(x_1, x_2) \}_{\ell \in \mathbb{Z}} \\ \text{とおくと}, g_\ell \in C^3(\mathbb{T}_p^2) \quad (C^3\text{-級}) \text{で} \\ \quad \sum_\ell \sup_{x \in \mathbb{T}_p^2} |g_\ell(x)| < \infty \\ \quad \sum_\ell \sup_x \left| \frac{\partial}{\partial x_k} g_\ell(x) \right| < \infty \qquad\qquad (k, j = 1, 2) \\ \quad \sum_\ell \sup_x \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} g_\ell(x) \right| < \infty \end{array} \right\}$$

簡単のため、次の記号も導入しておく.

$$F_{\tau,p} := \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right) \in M'_{\tau,p} \\ \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right] = 0 \\ \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j, \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right)^* \right] = 0 \quad (j = 1, 2) \end{array} \right\}$$

我々の主定理は、次の主張である。

<u>主定理</u>　群 G_p は $F_{\tau,p}$ に adjoint 作用で働き、

$$F_{\tau,p} / G_p \cong \pi^{-1}(\tau, 1) / H_p \qquad p : \text{負整数}$$

但し、右辺は $\boxed{2-3}$ の記法を用いた。

これは単純楕円型特異点である

(但し、$p = -1, -2, -3$ のとき)

§4、主定理の証明

$\boxed{\text{概略}}$ $F_{\tau,p}$ の元 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-A_1, \frac{\partial}{\partial x_2}-A_2\right)$ をとる。

これは Hilbert bdle $\mathbb{T}_p^2 \times L^2(S^1) \longrightarrow \mathbb{T}_p^2$ 上の flat な接続である。この接続に関する平行移動の微分方程式を考えると、($L^2(S^1)$-valued の) 熱方程式型の発展方程式となっている。発展方程式の理論を使うと、この方程式は解ける。つまり解の基本系 (＝発展作用素) が存在する。

特に、torus $\mathbb{T}_p^2$ の homology cycle に関する holonomy operator が存在し、共通固有ベクトルをもつ。この事実を使うと、Γ の正規直交基底で、$\frac{\partial}{\partial x_1}-A_1, \frac{\partial}{\partial x_2}-A_2$ を同時対角化するものの存在がいえる。この対角成分は、ある元 $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ の H_p 作用による orbit となっている

このことは主定理が成立していることを示す。

$\boxed{4-1}$ 平行移動の方程式と Holonomy 作用素

$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-A_1, \frac{\partial}{\partial x_2}-A_2\right) \in F_{\tau,p}$ をとる。

$$\mathcal{A}_x(t) := x_1 \cdot A_1(xt) + x_2 \cdot A_2(xt) \qquad (x = (x_1, x_2))$$

とおくと、$\mathcal{A}_x(t)$ は parameter $x \in \mathbb{R}^2$ と、時間 $t \in [0,2]$ に対して決まる $L^2(S^1)$ 上の閉作用素である。

但し、$\mathcal{A}_x(t)$ は $L^2(S^1)$ 上非有界で、定義域 $\mathcal{D}om(\mathcal{A}_x(t))$ は

$$\mathrm{Dom}(A_x(t)) = H^2(S^1) := \left\{ \begin{array}{l} L^2\text{-sence で 2階可微分} \\ \text{な } S^1 \text{ 上の函数} \end{array} \right\}$$

ソボレフ空間.

$A_x(t)$ を具体的に書くと.

$$\begin{aligned} A_x(t) = & \, x_1 \frac{-\tau}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 \\ & + \{ x_1 \cdot \alpha_2(tx) - x_2 \tau \} \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ & + 2\pi\sqrt{-1} \{ x_1 \cdot \alpha_1(tx) + x_2 \cdot \alpha_2(tx) \} \end{aligned}$$

$L^2(S^1)$-valued 発展方程式

$$\frac{d}{dt} y = A_x(t) \cdot y \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

$y : [0, 2] \longrightarrow L^2(S^1)$ を考える。

次のFACTがKeyである。

FACT 1 発展方程式 $(*)$ は、$x_1 < 0$ のとき、C^2-級の発展作用素をもつ。

すなわち、$2 \geq t \geq s \geq 0$ に対して $U_x(t,s) \in \mathcal{B}(L^2(S^1))$ が決まり、次の①〜④をみたす。

①
$$\begin{array}{ccc} \{ (t,s) \in [0,2]^2 : t \geq s \} & \longrightarrow & \mathcal{B}(L^2(S^1)) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (t,s) & \longmapsto & U_x(t,s) \end{array}$$

は強連続

② $U_x(t,s) \circ U_x(s,r) = U_x(t,r) \quad (t \geq s \geq r)$

$U_x(t,t) = I_{L^2(S^1)}$

③ $\mathcal{U}_x(t,s)$ は t について、強連続的微分可能で

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_x(t,s) = \mathcal{A}_x(t)\circ\mathcal{U}_x(t,s)$$

④ $\mathcal{U}_x(t,s)$ は s について、強連続的微分可能で

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}_x(t,s) = -\mathcal{U}_x(t,s)\circ\mathcal{A}_x(s)$$

<u>FACT 1の証明</u>

$x_1<0$ のとき、$\mathcal{A}_x(t)$ の最高階の微分 $\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2$ の係数 $x_1\frac{-\tau}{2}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}$ は $\mathrm{Re}\left(x_1\frac{-\tau}{2}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)>0$ をみたすので (＊) は熱方程式 tyne の発展方程式である。

$\mathrm{Arg}\left(x_1\frac{-\tau}{2}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)=\theta$ とする。$\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 次のことがいえる

(I) $\forall\varepsilon>0,\ \exists a_\varepsilon\in\mathbb{R},\ \exists M_\varepsilon>0$

s.t. (i) $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\mathrm{Arg}(\lambda-a_\varepsilon)|<\pi-|\theta|-\varepsilon\}$

は $\mathcal{A}_x(t)$ の resolvent set にふくまれる

$\forall t\in[0,2]$

(ii) $\|(\lambda-\mathcal{A}_x(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(S^1))}\leqq\frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$

for all $\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C} : |\mathrm{Arg}(\lambda-a_\varepsilon)|<\pi-|\theta|-\varepsilon\}$

$t\in[0,2]$

(II) 実数 λ_0 (充分大) を適当にとると、$\exists N>0,\ \exists\theta>0$

s.t. $\|(\lambda_0-\mathcal{A}_x(t))\cdot(\lambda_0-\mathcal{A}_x(s))^{-1}-I\|_{\mathcal{B}(L^2(S^1))}$

$\leqq N\cdot|t-s|^{\theta+1}$

for all $t,s\in[0,2]$

(I). (II) の証明には、$\alpha_j \equiv \{ a_\ell^{(j)}(x_1, x_2) \}$ とした時の $a_\ell^{(j)}(x_1,x_2)$ たちの smooth 性を使う。

Tanabe によって、(I). (II) から FACT 1 が従う。

FACT 2 $\left.\begin{array}{l} C_1 := U_{(p,0)}(1,0) \\ C_2 := U_{(p,1)}(1,0) \end{array}\right\}$ とおくと、

① C_1, C_2 は $L^2(S^1)$ 上の cpt operator

② C_1 と C_2 は可換である

③ C_1, C_2 ともに正規 operator である。

FACT 2 の証明

①は、熱方程式型 (=放物型) 発展方程式の発展作用素であるから、②は、$[\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2] = 0$、つまり接続が flat だから、Holonomy は基本群の表現になるという有限次元のときの事実の証明のまねをする。

③は、$\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j$ が正規 operator であるから、$A_x(t)$ が $\frac{d}{dt}(A_x(t) + A_x(t)^*) = [A_x(t), A_x(t)^*]$ をみたすので、これから従う。

FACT 3 $U_{(x_1+p, x_2)}(1,0) = U_{(x_1,x_2)}(1,0) \circ C_1$

$U_{(x_1+p, x_2+1)}(1,0) = U_{(x_1,x_2)}(1,0) \circ C_2$

FACT 3 の証明

$[\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2] = 0$ より、$\frac{\partial}{\partial x_j} U_x(1,0) = A_j(x) \circ U_x(1,0)$ $(j=1,2)$ が従う。これを用いて証明される。

$\boxed{4\text{-}2}$ 主定理の証明

$\boxed{4\text{-}1}$ の FACT 2 より、C_1, C_2 は共通固有ベクトルをもつ。(実は、もっと強く、ある $L^2(S^1)$ の正規直交基底によって同時対角化される。) その時、固有値は零でないから、$^\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ によって、$e^{-p\lambda_1}$, $e^{-p\lambda_1-\lambda_2}$ とかける。すなわち、$^\exists\varphi_0 \in L^2(S^1)$, $\varphi_0 \neq 0$.

$$\text{s.t.} \begin{cases} C_1 \varphi_0 = e^{-p\lambda_1} \cdot \varphi_0 \\ C_2 \varphi_0 = e^{-p\lambda_1-\lambda_2} \cdot \varphi_0 \end{cases}$$

上の $\varphi_0 \in L^2(S^1)$ を使って、

$$\psi_t(x) := e^{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)t} \cdot U_x(t, 0)\, \varphi_0$$

$x \in \mathbb{R}^2$ とおく

$\boxed{4\text{-}1}$ の FACT 3 を用いると、

$$\begin{cases} \psi_1(x_1+p, x_2) = \psi_1(x_1, x_2) \\ \psi_1(x_1+p, x_2+1) = \psi_1(x_1, x_2) \end{cases}$$ となり、

$\psi_1 \in \Gamma$ であることが示せる。このとき、

FACT $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j\right)\psi_1 = \lambda_j \cdot \psi_1 \quad (j=1,2)$

証明 $\psi_1(x) = e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} U_x(1,0)\varphi_0$ を微分。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_1 &= \lambda_j \psi_1 + e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} U_x(1,0) \cdot \varphi_0 \\ &= \lambda_j \psi_1 + e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \cdot A_j(x) \circ U_x(1,0)\varphi_0 \\ &= (\lambda_j + A_j(x))\psi_1 \end{aligned}$$

よって、$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - A_j(x)\right)\psi_1 = \lambda_j \psi_1 \quad (j=1,2)$

$\psi_1 \in \Gamma$ は $\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2(x)$ の共通固有ベクトルになっている。 $\psi_1 \in \Gamma$ を H_p の作用 R によって変換したものの族 $\{R_{\bar{l}}\psi_1\}_{l \in H_p}$ を考える。

$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1, \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right) \in F_{\tau,p}$ は、次のような H_p-擬不変性、

$$R_{\bar{l}}^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1\right) \circ R_{\bar{l}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1\right) + l_3\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right) + \frac{l_3^2}{2} 2\pi\sqrt{-1}\tau I + \frac{l_1}{p} 2\pi\sqrt{-1} I$$

$$R_{\bar{l}}^{-1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right) \circ R_{\bar{l}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right) + l_3(2\pi\sqrt{-1}\tau) I + l_2 (2\pi\sqrt{-1}) I$$

$$\text{for all } \bar{l} = [l_1, l_2, l_3] \in H_p$$

これから

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1\right)(R_{\bar{l}}\psi_1) = \left\{\lambda_1 + l_3 \cdot \lambda_2 - 2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{-l_3^2}{2} + \frac{-l_1}{p}\right)\right\}(R_{\bar{l}}\psi_1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right)(R_{\bar{l}}\psi_1) = \left\{\lambda_2 - 2\pi\sqrt{-1}(-l_3\tau - l_2)\right\}(R_{\bar{l}}\psi_1)$$

族 $\{R_{\bar{l}}\psi_1\}_{l \in \mathbb{Z}}$ は Hilbert space Γ の正規直交基底になっており、この基底に関して、$\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1$, $\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2$ が同時対角化された。 その対角成分は、$(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ の、H_p 作用 ρ (Affine作用) に関する軌道となっている。

定数切断 $1 \in \Gamma$ を H_p の作用 R によって変換したものの族 $\{R_{\bar{l}} 1\}_{l \in H_p}$ も Γ の正規直交基底である。

これを基準として採用する

$\{R_{\bar{e}}1\}_{\bar{e}\in H_p}$ を $\{R_{\bar{e}}\psi_1\}_{\bar{e}\in H_p}$ にうつす unitary 作用素 $g\in \mathcal{U}(\Gamma)$ をとる。$gR_{\bar{e}}1=R_{\bar{e}}\psi_1 \quad \bar{e}\in H_p$

すると、$(g\circ R_{\bar{m}})R_{\bar{e}}1$

$$= g\circ R_{\bar{m}\cdot\bar{e}}1 = R_{\bar{m}\cdot\bar{e}}\psi_1$$

$$= R_{\bar{m}}\circ R_{\bar{e}}\psi_1 = R_{\bar{m}}\circ gR_{\bar{e}}1$$

すなわち $(g\circ R_{\bar{m}}-R_{\bar{m}}\circ g)(R_{\bar{e}}1)=0$

for all $\bar{m},\bar{e}\in H_p$

$$\therefore g\in \mathcal{U}(\Gamma)^{(H_p,\,AdR)}$$

更に、$\psi_1=\psi_1(x)$ の x に対する smooth 性より、g の smooth 性がいえて、$g\in G_p$ である。

結局、$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-A_1,\frac{\partial}{\partial x_2}-A_2\right)\in F_{\tau,p}$ に対して、ある $g\in G_p$ が存在して、この g で変換すると基準とした正規直交基底 $\{R_{\bar{e}}1\}_{e\in H_p}$ に関して、$g^{-1}\circ\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-A_1\right)\circ g$, $g^{-1}\circ\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-A_2\right)\circ g$ は対角形作用素 on Γ であり、対角成分は $^\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$ の、H_p-作用 ρ による軌道である。

このことは主定理の成立を意味する。

§5. 注意

この小論では、moment map $=0$ で得られる Symplectic Quatient を調べたが、一般に、$^\forall a\in$ Center of $\mathcal{E}_p$ に対して、moment map $=a$ に対する Symplectic Quatient を考える

ことができる。 この一般のSymplectic Quatient は
単純楕円型特異点の変形とみなせるが、どのような構造を
持つのか調べねばならない。

Reference

(1) K.B. Kronheimer : ALE-gravitational instantons
thesis, Oxford Univ (1986)

(2) Saito, K : Einfach-elliptische Singularitäten
Invent. Math 23 (1974)

(3) Tanabe, H : On the equation of evolution in a Banach Space
Osaka. Math. J 12 (1960)